対数に関する補足説明

対数に関する定義，公式の補足説明を行う．

対数の定義

$\log_a b$ の直感的な意味は，「a を何乗すれば b になるか」を求める式だと考えるとよい． a を x 乗すると b になるなら $\log_a b = x$ となる．a を底，b を真数という．定義すると，

$$\begin{aligned} &b = a^x \Leftrightarrow \log_a b = x \\ &(a, b \text{ は正の数で } a \text{ が } 1 \text{ でないとき}) \end{aligned} \tag{1}$$

となり，これがすべての証明の基本となる．式 (1) の変形は両辺の log をとる，などという．

対数の直感的な意味から，$\log_a a^x$ は「a を何乗すると a^x になるか」だから x だということも理解できるだろう．対数の定義式 (1) から証明してみよ．

良く使う公式と証明

対数の公式と対応する指数の公式を考えるとわかりやすい．

[公式] $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

この公式は

$$a^i a^j = a^{i+j} \tag{2}$$

に対応すると考えるとわかりやすい．

[証明]

$$\log_a x = i, \log_a y = j \tag{3}$$

とする．指数の定義式 (1) より，

$$a^i = x, a^j = y \tag{4}$$

式 (2) に式 (3)，(4) を代入すると，

$$xy = a^{\log_a x + \log_a y} \tag{5}$$

対数の定義式 (1) から，

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \tag{6}$$

□

[公式] $\log_a x^n = n \log_a x$

$$(a^i)^n = a^{ni} \tag{7}$$

に対応すると考えるとわかりやすい．

[証明]

$$\log_a x = i \tag{8}$$

とする．指数の定義式 (1) より，

$$a^i = x \tag{9}$$

式 (7) に式 (8)，(9) を代入すると，

$$x^n = a^{n \log_a x} \tag{10}$$

対数の定義式 (1) から，

$$\log_a x^n = n \log_a x \tag{11}$$

□

[公式] $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ **(底の変換公式)**

$$\begin{aligned} &b^i = a, a^j = x \\ &\Rightarrow b^{ij} = x \end{aligned} \tag{12}$$

に対応すると考えるとわかりやすい．

[証明]

$$\log_b a = i, \log_a x = j \tag{13}$$

とする．指数の定義式 (1) より，

$$b^i = a, a^j = x \tag{14}$$

式 (12) より，

$$b^{ij} = x \tag{15}$$

式 (13) を代入して

$$b^{(\log_b a)(\log_a x)} = x \tag{16}$$

対数の定義式 (1) から，

$$(\log_b a)(\log_a x) = \log_b x \tag{17}$$

両辺を $\log_b a$ で割ることで公式を得る．

□