p.106 下 2 行の証明

$$P + 2(1-P) + 3(1-P)^2P + \cdots = \frac{1}{P} \qquad \text{（ただし，} 0 < P \leq 1\text{）}$$

を証明する．

上の式は当たりの確率が P のくじを続けて引く場合，最初の当たりが出るまでに引く回数の期待値である．

1 回目で当たる確率は P, 2 回目で初めて当たる確率は 1 回目外れ，2 回目当たりだから $(1-P)P$, 3 回目で初めて当たる確率は 2 回目まで外れ，3 回目当たりだから $(1-P)^2P$ である．一般に i 回めで初めて当たる確率は $(i-P)^{i-1}P$ と書ける．

それぞれにくじを引いた回数を掛けて和をとったものが期待値である．これを S と書くと，S は以下の無限数列の和となる．

$$S = P + 2(1-P) + 3(1-P)^2P + \cdots$$

無限数列の和を求めるには，まず有限項の和の式を作り，項の数を無限大にしたときの極限値として求める．この場合は S の n 項までの和を $S(n)$ とする．

$$S(n) = P + 2(1-P)P + 3(1-P)^2P + \cdots + n(1-P)^{n-1}P \tag{1}$$

そして

$$S = \lim_{n\to\infty} S(n)$$

として S を求める．

まず $S(n)$ を求める．$S(n)$ は等差数列 $1, 2, 3, \ldots, n$ と等比数列 $P, (1-P)P, (1-P)^2P, \ldots (1-P)^{n-1}P$ の積の形になっている．この場合，全項に等比数列の公比 $1-p$ を掛けた数列の和を $(1-P)S(n)$ を $S(n)$ から引くと簡単になる．

$$(1-P)S(n) = (1-P)P + 2(1-P)^2P + 3(1-P)^3P + \cdots + n(1-P)^nP \tag{2}$$

(2) 式の両辺を (1) 式両辺から引く．右辺をみると，(1) 式 2 項目と (2) 式 1 項目，(1) 式 3 項目と (2) 式 2 項目，$\cdots$ (1) 式最終項（n 項目）と (2) 式最後から 2 番目（$n-1$ 項目）を対応させて引いていくと，

$$S(n) - (1-P)S(n) = P + (1-P)P + (1-P)^2P + \cdots + (1-P)^{n-1}P - n(1-P)^nP \tag{3}$$

が得られる．(3) 式の左辺は

$$S(n) - (1-P)S(n) = (1-(1-P))S(n) = PS(n)$$

であるから (3) 式の両辺を P で割って

$$S(n) = 1 + (1-P) + (1-P)^2 + \cdots + (1-P)^{n-1} - n(1-P)^n \tag{4}$$

が得られる．(4) 式は最後の 1 項以外は等比数列の和であり，(1) 式より簡単になっている．(4) 式の等比数列の部分を T をおく．

$$S(n) = T - n(1-P)^n \tag{5}$$

ただし，

$$T = 1 + (1-P) + (1-P)^2 + \cdots + (1-P)^{n-1} \tag{6}$$

等比数列の和の公式を使ってもよいが，ここでも公比を各項に掛けたものを引くことで解ける.（公式もこの方法で証明される）

$$(1-P)T = (1-P) + (1-P)^2 + (1-P)^3 + \cdots + (1-P)^n \tag{7}$$

(6) 式から (7) 式を引く．項の対応に注意すると，(6) 式の最初の項と (7) 式の最後の項以外は消えて

$$T - (1-P)T = 1 - (1-P)^n$$

となる．以下の式変形で T の式が得られる．

$$PT = 1 - (1-P)^n$$

$$T = \frac{1}{P} - \frac{(1-P)^n}{P}$$

これを (5) 式に代入することで以下の式が得られる．

$$S(n) = \frac{1}{P} - \frac{(1-P)^n}{P} - n(1-P)^n \tag{8}$$

(8) 式の n を無限大にした極限が求める S である．

$$S = \lim_{n\to\infty} S(n)$$

$0 \leq 1-P < 1$ のとき，(8) 式第 2 項は n が無限大に近づくとき 0 に近づく．(8) 式第 3 項も n が無限大に近づくとき 0 に近づくが，これは以下のように証明できる．$1-P=0$ のとき，$n(1-P)^n = 0$ である．$0 < 1-P < 1$ のとき，

$$1 - P = \frac{1}{1+h} \qquad \text{（ただし,}0 < h\text{）}$$

と書ける．

$$n(1-P)^n = n\left(\frac{1}{1+h}\right)^n = \frac{n}{(1+h)^n} \tag{9}$$

2 項定理より，

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 \cdots$$

$n \geq 2$ のとき，4 項目以降を落として以下の不等式が得られる

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

よって (9) 式から以下の不等式が得られる．

$$\begin{aligned} n(1-P)^n &\leq \frac{n}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{n} + h + \frac{(n-1)}{2}h^2} \end{aligned} \tag{10}$$

(10) 式右辺は n が無限大に近づくと 0 に近づくことがわかる．これにより (8) 式第 3 項も n が無限大に近づくと 0 に近づくことが証明された．ゆえに

$$S = \lim_{n\to\infty} S(n) = \frac{1}{P}$$

が得られる．