対数に関する補足説明

対数に関する定義，公式の補足説明を行う．

対数の定義

$\log_a b$ の直感的な意味は，a を何乗すれば b になりますか? だと考えるとよい． a を x 乗すると b になるなら $\log_a b = x$ となる．a を底，b を真数という．定義すると，

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad (a, b \text{ は正の数で } a \text{ が } 1 \text{ でないとき}) \tag{1}$$

となり，これがすべての証明の基本となる．

対数の直感的な意味から，$\log_a a^b = b$ であることも理解できるだろう．対数の定義式 1 から証明してみよ．

良く使う公式と証明

対数の公式と対応する指数の公式を考えるとわかりやすい．

[公式] $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

この公式は

$$a^i a^j = a^{i+j} \tag{2}$$

に対応すると考えるとわかりやすい．

[証明]

$$\log_a x = i, \log_a y = j \tag{3}$$

とする．指数の定義式 1 より，

$$a^i = x, a^j = y \tag{4}$$

2 式 に 3 式，4 式を代入すると，

$$xy = a^{\log_a x + \log_a y} \tag{5}$$

対数の定義式 1 から，

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \tag{6}$$

[公式] $\log_a x^n = n \log_a x$

$$(a^i)^n = a^{ni} \tag{7}$$

に対応すると考えるとわかりやすい．

[証明]

$$\log_a x = i \tag{8}$$

とする．指数の定義式 1 より，

$$a^i = x \tag{9}$$

7 式に 8 式，9 式を代入すると，

$$x^n = a^{n \log_a x} \tag{10}$$

対数の定義式 1 から，

$$\log_a x^n = n \log_a x \tag{11}$$

[公式] $\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x$ **(底の変換公式)**

$$\begin{aligned} b^i &= a, a^j = x \\ \Rightarrow b^{ij} &= x \end{aligned} \tag{12}$$

に対応すると考えるとわかりやすい．

[証明]

$$\log_b a = i, \log_a x = j \tag{13}$$

とする．指数の定義式 1 より，

$$b^i = a, a^j = x \tag{14}$$

12 式に 13 式，14 式を代入すると，

$$b^{(\log_b a)(\log_a x)} = x \tag{15}$$

対数の定義式 1 から，

$$(\log_b a)(\log_a x) = \log_b x \tag{16}$$

両辺を $\log_b a$ で割ることで公式を得る．